

# 情報工学

## 予想問題 第2回 解答

(対抗シナリオ)

記述式の小問については解答例を示す。同じ内容が伝われば表現は問わない。

作成：Claude (Anthropic)

**1 【必須問題】 アルゴリズムとプログラミング**

(1-1) 最大値は  $n_1 + n_2 - 1$  回, 最小値は  $\min(n_1, n_2)$  回。

最大となるのは, 両区間の要素が交互に取り出され, 一方の区間に最後の 1 要素が残るまで比較が続く場合である。最小となるのは, 一方の区間の要素がすべて先に取り出される場合で, その区間の長さだけ比較が行われる。

(1-2) ① {5, 2} ② {1, 8} ③ {2, 5, 7} ④ {1, 3, 8}

(2) 各 merge 呼び出しでの比較回数 (7 行目の実行回数) は以下のとおり。

| 呼び出し                   | 併合する区間                | 比較回数 |
|------------------------|-----------------------|------|
| merge(A, 0, 0, 1, tmp) | [5] と [2]             | 1    |
| merge(A, 0, 1, 2, tmp) | [2, 5] と [7]          | 2    |
| merge(A, 3, 3, 4, tmp) | [1] と [8]             | 1    |
| merge(A, 3, 4, 5, tmp) | [1, 8] と [3]          | 2    |
| merge(A, 0, 2, 5, tmp) | [2, 5, 7] と [1, 3, 8] | 5    |
| 合計                     |                       | 11   |

したがって出力は以下のとおり。

```
1 2 3 5 7 8
11
```

(3) 併合後の区間の大きさが  $2^l$  となる段 ( $l = 1, 2, \dots, k$ ) について考える。この段では merge が  $n/2^l$  回呼び出され, 各呼び出しにおける比較回数は最大  $2^l - 1$  である。よってこの段の比較回数の合計は

$$\frac{n}{2^l} (2^l - 1) = n - \frac{n}{2^l}.$$

すべての段について総和をとると

$$\sum_{l=1}^k \left( n - \frac{n}{2^l} \right) = kn - n \sum_{l=1}^k \frac{1}{2^l} = kn - n \left( 1 - \frac{1}{2^k} \right) = kn - n + 1 = n \log_2 n - n + 1.$$

(4) 8 行目の比較が  $A[i] \leq A[j]$  と等号を含むため, 左右の区間に等しい値が存在する場合には左区間 (元の配列で前方にある要素) が先に tmp へ移される。よって等しい値をもつ要素どうしの相対的な順序が併合の前後で保存される。この性質がすべての段で成り立つため, 全体として安定ソートとなる。

(5) 補助配列 tmp が必要である点。merge は併合結果を一度 tmp に格納してから A へ書き戻すため, 入力と同じ大きさ  $n$  の追加の記憶領域を要し, 空間計算量は  $O(n)$  となる。一方クイックソートは配列内の要素の交換のみで整列を行うため, 再帰呼び出しのスタックを除けば追加の記憶領域を必要としない。

**2 【必須問題】 計算機システムとシステムプログラム**

(1-1) P 操作は「 $s > 0$  であることの検査」と「 $s$  の減算」という二つの動作からなる。これらが不可分でないと、二つのプロセスが同時に  $s = 1 > 0$  を検査して両方とも通過し、 $s$  が負になるなど、セマフォによる個数の管理や相互排除が成立しなくなる。したがって検査と更新は他のプロセスに割り込まれることなく一体として実行される必要がある。

(1-2) (a) P(empty) (b) V(full) (c) P(full) (d) V(empty)

(1-3) 入れ替えると生産者は V(full) を実行してから buf に書き込むことになる。例えば、生産者が V(full) を実行した直後にプロセッサが消費者に切り替わると、消費者は P(full) を通過して  $x = \text{buf}$  を実行できてしまう。このとき buf にはまだ今回の値が書き込まれていないため、前回の値が重複して読み出されたり、値が欠落したりする。

(2) デッドロックの 4 条件は以下のとおり。

- 相互排除 (mutual exclusion)：資源は同時に一つのプロセスしか使用できない。
- 保持と待機 (hold and wait)：資源を保持したまま、別の資源の解放を待つ。
- 横取り不可 (no preemption)：他のプロセスが保持する資源を強制的に奪えない。
- 循環待機 (circular wait)：資源の待ち関係に循環が存在する。

予防の方策の例：すべての資源に一意的な番号を与えて全順序を定め、各プロセスは必ず番号の昇順にのみ資源を獲得することとする。こうすると待ち関係に循環が生じ得ないため、循環待機の条件が崩れる。

(3-1) (a) P(s1) (b) V(s2) (c) P(s2) (d) V(s1)

これにより g1 の書き込みと g2 の読み出しが交互にのみ進行し、 $n$  への代入と読み出しが 1 回ずつ厳密に交替する。

(3-2) g1 は最初の P(s1) で、g2 は最初の P(s2) で、それぞれ待ち状態に入る。 $s_1 = s_2 = 0$  であるため、どちらのプロセスも先へ進めず、V 操作を実行できない。互いに相手の V 操作を待ち続けることになり、デッドロックが発生する。

#### 4 【選択問題】 計算理論

(1-1) 各段階の結果は以下のとおり。

(i)  $\varepsilon$  規則の除去.  $A \Rightarrow^* \varepsilon$  であるから  $A$  は nullable である。  $S \rightarrow AbA$  の各  $A$  を「残す」「消す」の両方の場合を列挙して

$$S \rightarrow AbA \mid Ab \mid bA \mid b, \quad A \rightarrow a.$$

( $A \rightarrow \varepsilon$  は削除する。  $S$  は nullable でないので開始記号に関する追加の処理は不要。)

(ii) 終端記号の変数化. 右辺の長さが 2 以上の規則に現れる終端記号  $b$  を新しい変数  $D$  で置き換え、  $D \rightarrow b$  を追加する。

$$S \rightarrow ADA \mid AD \mid DA \mid b, \quad A \rightarrow a, \quad D \rightarrow b.$$

(iii) 長さ 3 以上の規則の分解.  $S \rightarrow ADA$  を新しい変数  $E$  を用いて分解する。以上より求める  $G_2$  は

$$G_2 = (\{S, A, D, E\}, \{a, b\}, P_2, S),$$

$$P_2 = \{ S \rightarrow AE \mid AD \mid DA \mid b, \quad E \rightarrow DA, \quad A \rightarrow a, \quad D \rightarrow b \}.$$

すべての規則が  $X \rightarrow YZ$  または  $X \rightarrow a$  の形であり、無用な記号も含まない。

(1-2)  $w = aba$  ( $w_1 = a, w_2 = b, w_3 = a$ ) に対して、まず長さ 1 の部分列について、  $A \rightarrow a, D \rightarrow b, S \rightarrow b$  より  $Q[1][1] = \{A\}, Q[2][2] = \{S, D\}, Q[3][3] = \{A\}$  が定まる。以下同様に計算すると次表を得る。

| $i \setminus j$ | 1       | 2          | 3          |
|-----------------|---------|------------|------------|
| 1               | $\{A\}$ | $\{S\}$    | $\{S\}$    |
| 2               |         | $\{S, D\}$ | $\{S, E\}$ |
| 3               |         |            | $\{A\}$    |

(例:  $Q[1][2]$  は  $k = 1$  として  $Y \in Q[1][1] = \{A\}, Z \in Q[2][2] = \{S, D\}$  を調べる。  $S \rightarrow AD$  が該当するので  $Q[1][2] = \{S\}$ 。  $Q[2][3]$  は  $Y \in \{S, D\}, Z \in \{A\}$  で  $E \rightarrow DA$  と  $S \rightarrow DA$  が該当し  $\{S, E\}$ 。  $Q[1][3]$  は  $k = 1$  で  $Y \in \{A\}, Z \in Q[2][3] = \{S, E\}$  より  $S \rightarrow AE$  が該当し、  $k = 2$  で  $Y \in Q[1][2] = \{S\}, Z \in \{A\}$  は該当なし。)

$S \in Q[1][3]$  であるから、  $w = aba \in L(G_2)$  である。実際  $S \Rightarrow AE \Rightarrow aE \Rightarrow aDA \Rightarrow abA \Rightarrow aba$  と導出できる。

(2)  $Q[i][j]$  に含まれる変数は、  $w$  の第  $i$  文字目から第  $j$  文字目までの連続した部分列  $a_i a_{i+1} \cdots a_j$  を文法  $G$  において導出できる変数のすべてである。すなわち  $Q[i][j] = \{X \in V \mid X \Rightarrow^* a_i \cdots a_j\}$  である。

(3)  $S \in Q[1][n]$

(開始記号  $S$  から入力全体  $a_1 \cdots a_n$  が導出できることが、  $w$  が  $G$  によって生成されることと同値であるため。)

(4) Chomsky 標準形の文法では、生成規則は  $X \rightarrow YZ$  ( $Y, Z$  は変数) または  $X \rightarrow a$  ( $a$  は終端記号) の形に限られる。したがって構文木の各頂点について、  $X \rightarrow YZ$  を適用した頂点は子をちょうど二つ持ち、  $X \rightarrow a$  を適用した頂点は葉となる。すなわち構文木は、すべての内部頂点 (internal node) がちょうど二つの子を持つ二分木である。

葉の個数  $n$  に関する数学的帰納法により、頂点数が  $2n - 1$  であることを示す。

**基底段階:**  $n = 1$  のとき。葉が一つであるから木は根のみからなり、根には  $X \rightarrow a$  が適用されている。頂点数は  $1 = 2 \cdot 1 - 1$  であり主張は成り立つ。

**帰納段階：** $n \geq 2$  とし、葉の個数が  $n$  未満のすべての構文木について主張が成り立つと仮定する。葉が  $n \geq 2$  個であるから根は葉ではなく、根には  $X \rightarrow YZ$  が適用されている。根の二つの子を根とする部分木の葉の個数をそれぞれ  $n_1, n_2$  とすると、 $n_1 + n_2 = n$  かつ  $n_1, n_2 \geq 1$  であるから  $n_1, n_2 < n$  である。帰納法の仮定より、各部分木の頂点数はそれぞれ  $2n_1 - 1$ ,  $2n_2 - 1$  である。よって木全体の頂点数は、二つの部分木の頂点数に根の 1 個を加えて

$$(2n_1 - 1) + (2n_2 - 1) + 1 = 2(n_1 + n_2) - 1 = 2n - 1$$

となる。

以上より、任意の  $n \geq 1$  について、葉を  $n$  個持つ構文木の頂点数は  $2n - 1$  である。☒

## 6 【選択問題】電子回路と論理設計

(1-1)  $\dot{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$

(1-2) 電流の大きさは  $|\dot{I}| = V/|\dot{Z}|$  であり,  $|\dot{Z}| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}$  である。  $R$  は定数であるから  $|\dot{Z}|$  が最小となるのは虚部が 0 のとき, すなわち

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \iff \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

のときである。よって  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 。

(1-3)  $\omega < \omega_0$  のとき  $\omega L < 1/(\omega C)$  であるから  $\dot{Z}$  の虚部は負となり, 回路は容量性となる。このとき電流の位相は電源電圧より**進む**。 $\omega > \omega_0$  のとき虚部は正となり誘導性であるから, 電流の位相は電源電圧より**遅れる**。

(1-4) 共振時は  $\dot{Z} = R$  であるから, 電流の大きさは  $I = V/R$  である。コンデンサ両端の電圧の大きさは

$$V_C = \frac{I}{\omega_0 C} = \frac{V}{\omega_0 C R}.$$

ここで  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  より  $\frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_0 L$  である。よって

$$V_C = \frac{\omega_0 L}{R} V = QV.$$

(2-1)  $m(0, 2, 5, 7, 8, 10, 13, 15)$  を  $(a, b, c, d)$  の 4 変数カルノー図に記入すると, 1 となるのは  $b = d$  を満たすマスちょうど 8 個である。実際, 最小項の番号を 2 進数  $abcd$  で表すと  $0 = 0000$ ,  $2 = 0010$ ,  $8 = 1000$ ,  $10 = 1010$  はいずれも  $b = d = 0$  であり,  $5 = 0101$ ,  $7 = 0111$ ,  $13 = 1101$ ,  $15 = 1111$  はいずれも  $b = d = 1$  である。

$\bar{b}\bar{d}$  の 4 マスと  $bd$  の 4 マスがそれぞれ一つのグループにまとまるので, 最簡積和形は

$$f = \bar{b}\bar{d} + bd.$$

(これは  $f = \overline{b \oplus d}$  に等しい。)

(2-2)  $f = \bar{b}\bar{d} + bd$  を 2 入力 NAND のみで実現する。  $f = \overline{(\bar{b}\bar{d}) \cdot (bd)}$  と変形できるので,

$$\bar{b} = \text{NAND}(b, b) \quad \dots \text{ゲート 1}$$

$$\bar{d} = \text{NAND}(d, d) \quad \dots \text{ゲート 2}$$

$$t_1 = \text{NAND}(\bar{b}, \bar{d}) \quad \dots \text{ゲート 3}$$

$$t_2 = \text{NAND}(b, d) \quad \dots \text{ゲート 4}$$

$$f = \text{NAND}(t_1, t_2) \quad \dots \text{ゲート 5}$$

使用するゲート数は **5 個**。

(2-3) (a) 三つの状態はそれぞれ次を記憶している。

- $S_0$ : 直前までの入力に, 検出に使える接頭部分がない (直前の入力が 0 で, その前が 1 でない状態を含む)。
- $S_1$ : 直前の入力が 1 である (部分列 101 の先頭の 1 を読んだ状態)。
- $S_2$ : 直前の 2 記号が 10 である (あと 1 を読めば検出)。

遷移を  $x/z$  の形式で示すと以下のとおり。

| 現状態   | $x = 0$      | $x = 1$             |
|-------|--------------|---------------------|
| $S_0$ | $S_0$ , 出力 0 | $S_1$ , 出力 0        |
| $S_1$ | $S_2$ , 出力 0 | $S_1$ , 出力 0        |
| $S_2$ | $S_0$ , 出力 0 | $S_1$ , 出力 <b>1</b> |

$S_2$  で 1 を読んだときに 101 を検出して  $z = 1$  を出力し、そのときの末尾の 1 は次の検出の先頭として使えるので  $S_1$  へ遷移する。これにより重なりのある検出が可能となる。例えば入力系列 10101 に対する出力は 0,0,1,0,1 となり、2 回検出される。

(b) 状態割り当てに従って状態遷移表を書き、未使用状態  $(y_1, y_0) = (1, 1)$  をドントケアとして簡単化すると

$$D_1 = \bar{x}y_0, \quad D_0 = x, \quad z = xy_1.$$

( $D_1$  は  $(x, y_1, y_0) = (0, 0, 1)$  のみで 1 となるが、ドントケアの  $(0, 1, 1)$  を 1 とみなすことで  $\bar{x}y_0$  にまとめられる。 $D_0$  は次状態が  $S_1 = (0, 1)$  となる場合、すなわち  $x = 1$  のときに必ず 1 となる。 $z$  は  $S_2$  すなわち  $y_1 = 1$  で  $x = 1$  のときのみ 1 となる。)

**7 【選択問題】 数学解析と信号処理**

(1-1) 尤度関数は  $L_f(\lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i}$  であるから,

$$\log L_f(\lambda) = \sum_{i=1}^n (\log \lambda - \lambda x_i) = n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i.$$

式 (2) と比較して  $\alpha = n$ ,  $\beta = \lambda$ 。

(1-2)  $\lambda$  で偏微分して 0 とおくと

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log L_f(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \implies \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}}.$$

ここで  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  である。2 階微分は

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \log L_f(\lambda) = -\frac{n}{\lambda^2} < 0 \quad (\lambda > 0)$$

であり、定義域全体で負であるから、 $\hat{\lambda}$  は対数尤度の極大値（かつ最大値）を与える。

(2-1)  $E(\phi) = \sum_i (y_i - \phi x_i)^2$  を  $\phi$  で微分して

$$\frac{dE}{d\phi} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \phi x_i) = 0 \implies \hat{\phi} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

2 階微分は  $2 \sum_i x_i^2 > 0$  であるから、これは最小値を与える。

(2-2) 残差  $r_i = y_i - \phi x_i$  が独立に  $N(r; 0, \sigma^2)$  に従うとすると、尤度関数は

$$L(\phi) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_i - \phi x_i)^2}{2\sigma^2}\right)$$

であり、その対数は

$$\log L(\phi) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \phi x_i)^2.$$

第 1 項は  $\phi$  を含まない定数であり、第 2 項の係数  $-1/(2\sigma^2)$  は負である。したがって  $\log L(\phi)$  を  $\phi$  について最大化することは  $\sum_i (y_i - \phi x_i)^2 = E(\phi)$  を最小化することと同値である。よって  $\phi$  の最尤推定は小問 (2-1) の最小二乗法による解と一致する。

(3-1) 原信号に含まれる最高周波数を  $f_{\max}$  とするとき、

$$f_s > 2f_{\max}$$

を満たす必要がある。この条件を与える定理を**標本化定理**（サンプリング定理, Nyquist-Shannon の標本化定理）という。

(3-2) 標本化の時刻は  $t = k/f_s = k/4$  ( $k$  は整数) である。このとき

$$\sin(2\pi \cdot 3 \cdot t) = \sin\left(\frac{3\pi k}{2}\right), \quad -\sin(2\pi \cdot 1 \cdot t) = -\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

であり、 $\sin(3\pi k/2) = -\sin(\pi k/2)$  がすべての整数  $k$  について成り立つ。したがって周波数

$$f_1 = |f_0 - f_s| = |3 - 4| = 1 \text{ [Hz]}$$

の正弦波（符号を反転したもの）が同じ標本点を通る。この現象を**エイリアシング**（折り返し雑音, aliasing）という。

(3-3) 標本化を行う前段に、アナログのローパスフィルタ（アンチエイリアシングフィルタ）を挿入する。その遮断周波数を  $f_s/2 = 2 \text{ [Hz]}$  以下に設定し、 $f_s/2$  を超える周波数成分をあらかじめ除去しておく。これにより標本化定理の条件が満たされ、折り返しによる誤りを防ぐことができる。