

情報工学

予想問題 第5回

(証明・構成問題の重い年)

必須問題：問題 1・2 選択問題：問題 4・6・7 より 2 問選択

試験時間：3 時間 配点：500 点満点

2018～2026 年度（一部 2006～2017 年度）の過去問分析に基づく自作予想問題

作成：Claude (Anthropic)

1 【必須問題】 アルゴリズムとプログラミング

配点：(1) 15 点, (2) 20 点, (3-1) 10 点, (3-2) 15 点, (3-3) 15 点, (4) 15 点, (5) 10 点, (6-1) 15 点, (6-2) 10 点

フィボナッチ数を $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n \geq 2)$ で定める。次ページの図 1 は ANSI C で記述されたプログラムである。大域変数 `count` は関数の呼び出し回数を数えるカウンタである。図 1 のプログラムに関する以下の各問に答えよ。

(1) 関数 `funcA` について以下の各小問に答えよ。

(1-1) `funcA(5)` の呼び出しの木（どの引数の呼び出しがどの引数の呼び出しを生むか）を図示し、引数 0～5 それぞれについて `funcA` が呼び出される回数を示せ。

(1-2) `funcA(n)` を 1 回呼び出したときの `funcA` の総呼び出し回数を $C(n)$ とする。 $C(0) = C(1) = 1, C(n) = C(n-1) + C(n-2) + 1 (n \geq 2)$ が成り立つことを示し、これより $C(n) \geq F_n$ であること、したがって `funcA` の時間計算量が n の多項式で抑えられないことを説明せよ (F_n が n に対して指数的に増加することは用いてよい)。

(2) 関数 `funcB` はメモ化 (memoization) による改良版である。ただし、21 行目の実行によって `memo` が書き換えられることはない。以下の各小問に答えよ。

(2-1) プログラムが正しく動作するように空欄 (a), (b) を埋めよ。

(2-2) 図 1 のプログラムが開始してから終了するまでに出力される内容をすべて記述せよ。

(2-3) $n \geq 2$ に対して `funcB(n)` の総呼び出し回数が $2n - 1$ となることを、「`memo[k]` が未計算の状態で `funcB(k)` が呼ばれるのは高々 1 回である」ことに基づいて説明せよ。

(2-4) 再帰を用いず、ループで F_n を計算する C の関数を書け。ただし使用する `int` 型の局所変数は 3 個以内（引数 n とループ変数を除く）とし、時間計算量と空間計算量をオーダ表記で示せ。

(3-1) 関数 `funcA` を実行する際に必要となる呼び出しスタック (call stack) の深さについて考える。`funcA(n)` を呼び出したときの再帰の最大の深さを n を用いて示せ。また、小問 (4) のループによる実装と比較して、記憶領域の観点でどのような差があるかを 1, 2 行で述べよ。

(3) 計算の効率化について以下の各小問に答えよ。フィボナッチ数の漸化式は、行列 (matrix) を用いて

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と表せる。以下の各小問に答えよ。

(3-2) 上の関係を繰り返し用いることにより、 M^n の各成分が F_{n+1}, F_n, F_{n-1} を用いて

$$M^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 1)$$

と表せることを、 n に関する数学的帰納法により示せ。

(3-3) 小問 (6-1) の結果を用いると、 M^n を計算することで F_n が得られる。行列の積を 1 回の演算と数えるとき、繰り返し二乗法 (repeated squaring) により M^n を計算するのに必要な演算回数のオーダを n を用いて示せ。また、その回数となる理由を 1, 2 行で述べよ。

```
1 #include <stdio.h>
2 int count = 0;
3 int memo[50];
4
5 int funcA(int n) {
6     count++;
7     if (n <= 1) return n;
8     return funcA(n - 1) + funcA(n - 2);
9 }
10
11 int funcB(int n) {
12     count++;
13     if (n <= 1) return n;
14     if ([ (a) ]) return memo[n];
15     return memo[n] = [ (b) ];
16 }
17
18 int main(void) {
19     for (int i = 0; i < 50; i++) memo[i] = -1;
20     count = 0;
21     printf("%d %d\n", funcA(5), count);
22     count = 0;
23     printf("%d %d\n", funcB(5), count);
24     return 0;
25 }
```

図1 プログラム

2 【必須問題】 計算機システムとシステムプログラム

配点：(1) 20 点, (2) 5 点, (3) 10 点, (4-1) 15 点, (4-2) 10 点, (5) 10 点, (6) 10 点, (7-1) 10 点, (7-2) 10 点, (7-3) 15 点, (7-4) 10 点

ページング (paging) 方式による仮想記憶 (virtual memory) において、ページ置換アルゴリズム (page replacement algorithm) を考える。以下では、プロセスに割り当てられるページ枠 (page frame) の数を k とし、最初はすべての枠が空であるとする。

代表的な置換アルゴリズムとして以下の三つを扱う。

- **FIFO** (first-in first-out)：メモリに最も早く読み込まれたページを追い出す。
- **LRU** (least recently used)：最後に参照された時点が最も古いページを追い出す。
- **OPT** (optimal)：以後最も長く参照されないページを追い出す。

以下の各問に答えよ。

(1) ページ置換アルゴリズムについて以下の各小問に答えよ。

(1-1) $k = 3$ とし、ページ参照列 (reference string)

$$R_1 = 2, 3, 2, 1, 5, 2, 4, 5, 3, 2, 5, 2$$

に対して、FIFO, LRU, OPT のそれぞれでページフォルト (page fault) の発生回数を求めよ。各参照時点における各ページ枠の内容を表の形で示すこと。

(1-2) OPT がページを追い出す際の選択規則を 1, 2 行で述べよ。また、OPT を実際のシステムでそのまま実装できない理由を 1 行で述べよ。

(1-3) 小問 (1) の結果について、FIFO と LRU のフォルト回数を比較せよ。一般に LRU の方が優れているとされる理由を、プログラムの参照の局所性 (locality of reference) に基づいて 2, 3 行で説明せよ。

(1-4) ページ参照列

$$R_2 = 1, 2, 3, 4, 1, 2, 5, 1, 2, 3, 4, 5$$

に対して FIFO を適用する。 $k = 3$ の場合と $k = 4$ の場合のそれぞれについてページフォルトの発生回数を求め、各時点の枠の内容を表で示せ。また、この結果に見られる現象の名称を答えよ。

(1-5) LRU では小問 (4-1) の現象が発生しないことが知られている。その理由を、 k 個の枠を用いたときにメモリ上に存在するページの集合と、 $k + 1$ 個の枠を用いたときのページの集合との包含関係に着目して 2, 3 行で説明せよ。

(1-6) $k = 3$ のとき、**FIFO のページフォルト回数が LRU のページフォルト回数より少なくなる** ページ参照列を一つ構成せよ。構成した参照列に対する両方式の枠の内容の推移とフォルト回数を示し、なぜそのようなになるかを説明せよ。

(1-7) LRU を厳密に実装するには参照時刻の管理が必要でありコストが高い。その近似としてクロックアルゴリズム (clock algorithm, セカンドチャンス方式) が用いられる。参照ビット (reference bit) を用いたその動作を 3, 4 行で説明せよ。

(2) 二次記憶装置 (secondary storage) である磁気ディスク (magnetic disk) について以下の各小問に答えよ。あるディスクの諸元を表 1 に示す。

回転数	7200 [rpm]
平均シーク時間 (average seek time)	8.0 [ms]
1 トラックあたりのセクタ数	500
1 セクタの大きさ	512 [バイト]

表1 磁気ディスクの諸元

- (2-1) このディスクの平均回転待ち時間 (average rotational latency) を [ms] 単位で求めよ。また、そのように求まる理由を1行で述べよ。
- (2-2) 1セクタを読み出すのに要する転送時間 (transfer time) を [ms] 単位で求めよ。さらに、ランダムな位置にある1セクタを読み出すのに要する平均アクセス時間を求めよ。
- (2-3) 4KiB のデータを読み出す場合を考える。このデータが連続したセクタに配置されている場合と、512 バイトずつ8か所に分散して配置されている場合のそれぞれについて、平均アクセス時間を求めよ。ただし連続配置の場合、シークと回転待ちは最初の1回のみ生じるものとする。両者を比較して、ファイルシステムがデータをなるべく連続した領域に配置しようとする理由を1, 2行で述べよ。
- (2-4) 小問(6)で扱ったページフォルトの処理には、このディスクへのアクセスが伴う。主記憶へのアクセス時間を100 ns, ページフォルト1回あたりの処理時間を小問(7-2)で求めた平均アクセス時間とすると、ページフォルト率が $p = 5.0 \times 10^{-6}$ である場合の実効アクセス時間 (effective access time) を求めよ。また、多重プログラミング度を上げすぎるとページフォルト率が急増してシステム全体の処理能力が著しく低下する現象の名称を答えよ。

4 【選択問題】 計算理論

配点：(1) 25 点, (2) 30 点, (3-1) 15 点, (3-2) 40 点, (4) 15 点

アルファベット (alphabet) $\Sigma_{ab} = \{a, b\}$ で構成される回文 (palindrome) を考える。回文とは前から読んでも後ろから読んでも同じ文字列 (string) のことである。文字列 w の長さを $|w|$ と表し、 w の前後を反転 (reverse) した文字列を w^R と表す。空列 (empty string) ε ($|\varepsilon| = 0$) は回文である。回文全体からなる言語 (language) を $L_{\text{pal}} = \{w \in \Sigma_{ab}^* \mid w = w^R\}$ とする。以下の各問に答えよ。

(1) プッシュダウンオートマトン (pushdown automaton) は $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z, F)$ で表される。 Q は状態 (state) の有限集合、 Σ は入力アルファベット (input alphabet)、 Γ はスタックアルファベット (stack alphabet)、 δ は遷移関数 (transition function)、 q_0 は開始状態 (start state)、 $Z \in \Gamma$ はスタックの開始記号 (initial pushdown symbol)、 F は最終状態 (final state) の集合である。

遷移に付与するラベル $(r, s)/t$ ($r \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $s \in \Gamma$, $t \in \Gamma^*$) は、入力から読み出す記号が r でスタックの先頭にある記号が s のとき、スタックからその s を取り去り、 t をスタックに押し込むことを意味する。 t が複数の記号の場合は、右側の記号から順にスタックに押し込む。 r が ε の場合は、入力から記号を読み出さずに遷移を行う。 t が ε の場合は、スタックに記号を押し込まない。スタックアルファベットは $\Gamma = \{Z, 0, 1\}$ とする。

最終状態による受理 (acceptance by final state) を行い、言語 L_{pal} を受理する状態数 3 の非決定性プッシュダウンオートマトンを構成したい。開始状態を q_0 、最終状態を q_2 とするとき、必要な遷移をすべて $(r, s)/t$ の形式で答えよ。また、どの遷移で非決定性 (nondeterminism) を用いているかを 1, 2 行で述べよ。

(2) L_{pal} が正則言語 (regular language) ではないことを、以下に示す正則言語に対する反復補題 (pumping lemma) を用いて、背理法 (proof by contradiction) により証明せよ。

正則言語に対する反復補題

L を正則言語とすると、次の条件を満たす正の整数 n が存在する： $v \in L$ 、 $|v| \geq n$ ならば $v = xyz$ ($|xy| \leq n$, $|y| \geq 1$) と分解でき、任意の $k \geq 0$ に対して $xy^kz \in L$ である。

(3) 言語 $L_{ww} = \{ww \mid w \in \Sigma_{ab}^*\}$ が文脈自由言語 (context-free language) ではないことを、以下に示す文脈自由言語に対する反復補題を用いて示したい。

文脈自由言語に対する反復補題

L を任意の文脈自由言語とする。 L に対してある定数 p が存在し、 L に属する長さ p 以上の任意の文字列 s は、以下の条件 1~3 を満たす $s = uvxyz$ の形に分解 (decompose) できる。

条件 1. 任意の $i \geq 0$ に対して、 $uv^i xy^i z \in L$

条件 2. $|vy| > 0$

条件 3. $|vxy| \leq p$

(3-1) L_{ww} が文脈自由言語であると仮定し、反復補題の定数を p とする。証明に用いる文字列として $s = a^p b^p a^p b^p$ を選ぶ。このとき $s \in L_{ww}$ であることを、 w を具体的に示して確認せよ。また $|s| \geq p$ であることを確認せよ。

(3-2) 以下は L_{ww} が文脈自由言語でないことの証明である。適切な記述で空欄 (ア)~(エ) を埋めよ。

証明： L_{ww} が文脈自由言語であると仮定する。反復補題の定数を p とし、 $s = a^p b^p a^p b^p$ とする。

$s \in L_{ww}$ かつ $|s| = 4p \geq p$ であるから、 $s = uvxyz$ と分解でき、条件 1~3 が成り立つ。

条件 1 で $i = 0$ とした文字列 $s' = uxz$ を考える。条件 2 より $|vy| > 0$ であるから、 $|s'| = 4p - |vy| < 4p$ である。

まず、 $|vy|$ が奇数の場合、 $|s'|$ は「空欄 (ア)」となるため $s' \in L_{ww}$ ではあり得ず、条件 1 に矛盾する。

以下では $|vy|$ が偶数の場合を考える。

s を a^p , b^p , a^p , b^p の四つのブロック (block) に分けて考える。条件 3 より $|vxy| \leq p$ であるから, vxy は [空欄 (イ)]。この事実に基づき, vxy の位置により以下の 3 通りに場合分けする。

- vxy が前半の 2 ブロック $a^p b^p$ の範囲に収まる場合：

[空欄 (ウ)]

これは条件 1 に矛盾する。

- vxy が後半の 2 ブロック $a^p b^p$ の範囲に収まる場合：

前の場合と対称的な議論により, 同様に条件 1 に矛盾する。

- vxy が中央の $b^p a^p$ の境界をまたぐ場合：

[空欄 (エ)]

これは条件 1 に矛盾する。

以上よりすべての場合で矛盾が生じる。したがって仮定が誤りであり, L_{ww} は文脈自由言語ではない。

(証明終)

- (4) 文脈自由言語は積集合 (intersection) について閉じて (closed) いない。このことを, $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$ と $L_2 = \{a^m b^n c^n \mid n, m \geq 0\}$ を用いて説明せよ。ただし, $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ が文脈自由言語でないことは証明済みとして用いてよい。

6 【選択問題】 電子回路と論理設計

配点：(1) 15 点, (2) 20 点, (3-1) 15 点, (3-2) 20 点, (4) 15 点, (5) 10 点, (6-1) 20 点, (6-2) 10 点

(1) 2 ビット比較器について以下の各小問に答えよ。

(1-1) 2 ビット符号なし 2 進数 (2-bit unsigned binary number) $A = (a_1, a_0)$ と $B = (b_1, b_0)$ を比較する回路を考える。 $A = B$ のとき 1, それ以外のとき 0 となる出力 E の論理式を, 排他的論理和の否定 (XNOR) を用いて示せ。また, その式が $A = B$ の判定として正しい理由を, 各ビットの一致条件に基づいて 1, 2 行で説明せよ。

(1-2) $A > B$ のとき 1, それ以外のとき 0 となる出力 G の論理式の最簡積和形 (最小積和形, minimum sum-of-products form) を, カルノー図 (Karnaugh map) を用いて求めよ。用いたカルノー図も示すこと。ここで, 解答の各積項のリテラル (literal) は a_1, a_0, b_1, b_0 の順で記載すること。

(2) 同期式カウンタについて以下の各小問に答えよ。三つの D フリップフロップ (D flip-flop) を用いた同期式カウンタ (synchronous counter) を考える。各フリップフロップの出力を (y_2, y_1, y_0) , 入力を (D_2, D_1, D_0) とし, 次の接続で構成する。

$$D_2 = \overline{y_0}, \quad D_1 = y_2, \quad D_0 = y_1$$

(2-1) 初期状態 (initial state) $(y_2, y_1, y_0) = (0, 0, 0)$ からクロック信号 (clock signal) を与えたとき, 状態が最初の状態に戻るまでの遷移をすべて順に列挙せよ。また, このように構成されたカウンタの名称を答えよ。

(2-2) このカウンタには, 小問 (2-1) で得た巡回に含まれない状態が二つ存在する。それらの状態をすべて挙げ, それぞれを初期状態としたときの状態遷移を調べよ。その結果として生じる問題の名称を, 以下の選択肢 (A)~(D) から一つ選べ。また, この問題への対策を一つ具体的に述べよ。

(A) ハザード (hazard) (B) ロックアウト (lockout) (C) メタステービリティ (metastability) (D) ファンアウト (fanout)

(2-3) 小問 (2) のカウンタは, 通常の 2 進カウンタ (binary counter) と比べて, 状態が遷移するごとに値が変化するフリップフロップが常に一つだけであるという性質を持つ。この性質が回路設計上どのような利点をもたらすか, 状態をデコード (decode) する際に生じるグリッチ (glitch) に着目して 2, 3 行で説明せよ。

(2-4) n 個の D フリップフロップを用いて小問 (2) と同様に構成したジョンソンカウンタについて, 正規の巡回に含まれる状態の個数を n を用いて示せ。また, n ビットの 2 進カウンタが表現できる状態数と比較し, 同じ状態数を得るために必要なフリップフロップの個数の観点から, ジョンソンカウンタの短所を 1, 2 行で述べよ。

(3) 小問 (1) で設計した 2 ビット比較器を 2 個用いて, 4 ビット符号なし 2 進数 $A = (a_3, a_2, a_1, a_0)$ と $B = (b_3, b_2, b_1, b_0)$ を比較する回路を構成したい。上位 2 ビット (a_3, a_2) と (b_3, b_2) を比較する比較器の出力を E_H, G_H とし, 下位 2 ビット (a_1, a_0) と (b_1, b_0) を比較する比較器の出力を E_L, G_L とする。

(3-1) 4 ビットの比較結果 E_4 ($A = B$ のとき 1) および G_4 ($A > B$ のとき 1) を, E_H, G_H, E_L, G_L を用いた論理式で表せ。また, G_4 の式がなぜそのようなになるかを, 上位ビットの比較結果が下位ビットの比較結果に対して持つ優先順位に基づいて 2, 3 行で説明せよ。

(3-2) $A = 1001_2, B = 1010_2$ の場合について, E_H, G_H, E_L, G_L の値をそれぞれ求め, 小問 (6-1) の式に代入して E_4, G_4 の値を求めよ。得られた結果が A と B の大小関係と一致することを確認せよ。

7 【選択問題】 数学解析と信号処理

配点：(1) 15 点, (2-1) 5 点, (2-2) 15 点, (3) 15 点, (4) 10 点, (5-1) 10 点, (5-2) 15 点, (6) 5 点, (7-1) 20 点, (7-2) 10 点, (7-3) 5 点

周期 (period) 2π の関数 (function) $f(x)$ のフーリエ級数展開 (Fourier series expansion) を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

と表す。図 1 に示す周期 2π の関数 $f(x) = |x|$ ($-\pi \leq x \leq \pi$), $f(x) = f(x + 2\pi)$ について, 以下の各問に答えよ。ただし, 導出の過程も示すこと。

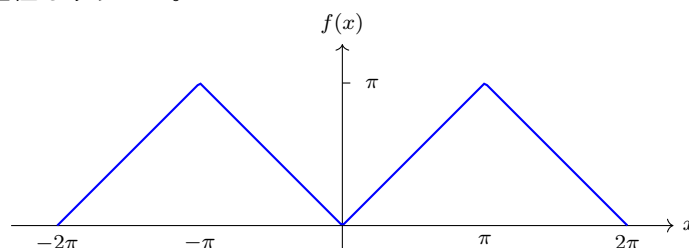


図 1 周期 2π の関数 $f(x) = |x|$

(1) $f(x)$ のフーリエ級数展開について以下の各小問に答えよ。

(1-1) 係数 a_0 および a_n ($n \geq 1$) を計算し, $f(x)$ のフーリエ級数展開が

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$$

となることを示せ。

(1-2) 式 (1) のフーリエ級数は, 複素数を用いて

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx}$$

と表すこともできる (j は虚数単位)。実数形の係数 a_n , b_n と複素形の係数 c_n の関係を, $n > 0$, $n = 0$, $n < 0$ の各場合について示せ。また, $f(x) = |x|$ に対する c_n を求めよ。

小問 (1) で得た級数の部分和 (partial sum)

$$S_N(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$$

について以下の各小問に答えよ。

(2) 小問 (1) の結果から得られる級数の値と, 部分和による近似について以下の各小問に答えよ。

(2-1) 小問 (1-1) の結果に $x = 0$ を代入することにより, 級数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ の値を求めよ。

(2-2) 求めたい級数を $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ とおく。 S を n が奇数の項の和と偶数の項の和に分け, 偶数の項の和を S 自身を用いて表すことにより, 小問 (2-1) の結果から S の値を求めよ。

(2-3) パーセバルの等式 (Parseval's identity)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

を小問 (1-2) の結果に適用し, 級数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$ の値を求めよ。

(2-4) $S_1(x)$ と $S_2(x)$ をそれぞれ具体的に書き下し, $x = 0$ における値を求めよ。 $f(0) = 0$ と比較して, 項数を増やすことで近似が改善されることを確認せよ。

(2-5) 打ち切り誤差 $|f(x) - S_N(x)|$ を評価したい。まず, 任意の x に対して

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

が成り立つ理由を 1, 2 行で述べよ。次に, $k \geq N$ に対する和を積分で上から評価することにより

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} < \frac{1}{2(2N-1)}$$

を示せ。さらに, この評価を用いて, すべての x について誤差を 0.01 以下に抑えるために十分な項数 N を一つ求めよ。

(2-6) $f(x) = |x|$ のフーリエ級数では, 不連続な関数の場合と異なりギブス現象 (Gibbs phenomenon) が生じない。その理由を $f(x)$ の連続性に着目して 2, 3 行で説明せよ。

(3) 離散時間系について以下の各小問に答えよ。長さ N の離散時間信号 $x[n]$ ($0 \leq n \leq N-1$) の離散フーリエ変換 (discrete Fourier transform) を

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

で定義する。ここで j は虚数単位である。

(3-1) $N = 4$, $x[n] = \{1, 1, 0, 0\}$ (すなわち $x[0] = x[1] = 1$, $x[2] = x[3] = 0$) とする。 $X[0]$, $X[1]$, $X[2]$, $X[3]$ をそれぞれ求めよ。

(3-2) 小問 (3-1) の結果について, $X[1]$ と $X[3]$ の間に成り立つ関係を述べよ。また, $x[n]$ が実数値信号であるとき一般に $X[k]$ と $X[N-k]$ の間に成り立つ関係を示し, その理由を定義式に基づいて 1, 2 行で説明せよ。

(3-3) 連続時間の周期関数に対するフーリエ級数展開と, 離散時間信号に対する離散フーリエ変換は, いずれも信号を複素指数関数の重ね合わせとして表す点で共通している。両者の本質的な違いを, 得られる周波数成分の個数に着目して 2, 3 行で述べよ。