

情報工学

予想問題 第8回

(グラフ・確率統計重視年)

必須問題：問題 1・2 選択問題：問題 4・6・7 より 2 問選択

試験時間：3 時間 配点：500 点満点

2006～2026 年度の過去問分析に基づく自作予想問題

作成：Claude (Anthropic)

1 【必須問題】 アルゴリズムとプログラミング

配点：(1-1) 15 点, (1-2) 25 点, (2-1) 20 点, (2-2) 15 点, (3-1) 20 点, (3-2) 15 点, (3-3) 15 点

次ページの図 1 は ANSI C で記述されたプログラム (program) であり, 重み付き有向グラフ (weighted directed graph) 上の単一始点最短経路 (single-source shortest path) を求めるダイクストラ法 (Dijkstra's algorithm) を実装している。頂点 (vertex) には 0 から $V - 1$ の番号が付けられ, 辺 (edge) の重みは隣接行列 (adjacency matrix) W で与えられる。辺が存在しない場合は $INF (= 10^9)$ とする。図 1 のプログラムに関する以下の各問に答えよ。

(1) アルゴリズムの動作について以下の各小問に答えよ。対象とするグラフを図 2 に示す。頂点 A, B, C, D, E, F にはそれぞれ番号 0, 1, 2, 3, 4, 5 が割り当てられている。

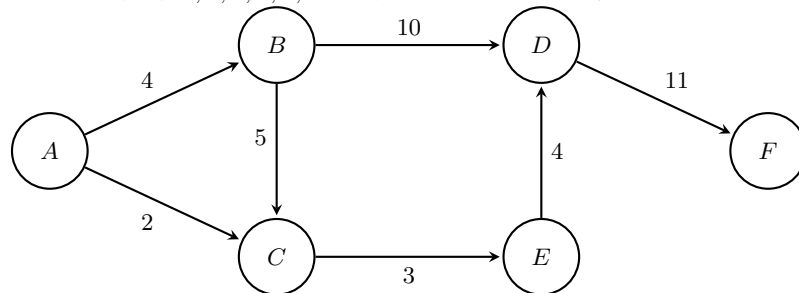


図 2 対象とする重み付き有向グラフ

(1-1) プログラムが正しく動作するように, 空欄 (a), (b) を埋めよ。

(1-2) 始点を A (頂点番号 0) として図 1 のプログラムを実行する。26 行目のループの各反復において選ばれる頂点 (u の値に対応する頂点名) を選ばれる順に列挙せよ。また, 各反復が終了した時点での配列 d の内容を表の形で示せ。

(2) プログラムの出力と性質について以下の各小問に答えよ。

(2-1) 図 1 のプログラムが開始してから終了するまでに出力される内容をすべて記述せよ。

(2-2) ダイクストラ法は, 一度確定した頂点の距離を後から更新することがない。この性質が成り立つために, 辺の重みが満たすべき条件を述べよ。また, その条件が破れる場合に誤った結果が得られる具体例を, 3 頂点程度の小さなグラフを挙げて説明せよ。

(3) 計算量と改良について以下の各小問に答えよ。頂点数を V , 辺数を E とする。

(3-1) 図 1 の実装における時間計算量 (time complexity) を V を用いてオーダ表記で示せ。また, その根拠を 26 行目のループと, 未確定頂点から最小距離のものを選ぶ処理に基づいて 2, 3 行で説明せよ。

(3-2) 未確定頂点の管理に 2 分ヒープ (binary heap) を用いた優先度付きキュー (priority queue) を使うと, 時間計算量を改善できる。この場合の時間計算量を V と E を用いてオーダ表記で示せ。

(3-3) 疎なグラフ (sparse graph, $E = O(V)$) と密なグラフ (dense graph, $E = O(V^2)$) のそれぞれについて, 小問 (3-1) と (3-2) のどちらの実装が有利かを, オーダの比較に基づいて述べよ。

```

1  #include <stdio.h>
2  #define V 6
3  #define INF 1000000000
4
5  int W[V][V];
6  int d[V];
7  int done[V];
8
9  int minVertex(void) {
10     int m = -1;
11     for (int v = 0; v < V; v++) {
12         if (!done[v] && (m == -1 || d[v] < d[m])) m = v;
13     }
14     return m;
15 }
16
17 void dijkstra(int s) {
18     for (int v = 0; v < V; v++) {
19         d[v] = INF;
20         done[v] = 0;
21     }
22     d[s] = 0;
23
24     for (int k = 0; k < V; k++) {
25         int u = minVertex();
26         if (d[u] == INF) break;
27         done[u] = 1;
28         for (int v = 0; v < V; v++) {
29             if (W[u][v] != INF && [ (a) ]) {
30                 d[v] = [ (b) ];
31             }
32         }
33     }
34 }
35
36 int main(void) {
37     for (int i = 0; i < V; i++)
38         for (int j = 0; j < V; j++) W[i][j] = INF;
39     W[0][1] = 4;  W[0][2] = 2;
40     W[1][2] = 5;  W[1][3] = 10;
41     W[2][4] = 3;  W[4][3] = 4;
42     W[3][5] = 11;
43
44     dijkstra(0);
45     for (int v = 0; v < V; v++) printf("%d ", d[v]);
46     printf("\n");
47     return 0;
48 }

```

図1 プログラム

2 【必須問題】 計算機システムとシステムプログラム

配点：(1-1) 15 点, (1-2) 25 点, (1-3) 15 点, (1-4) 15 点, (2-1) 15 点, (2-2) 20 点, (2-3) 20 点

(1) プロセス (process) のスケジューリング (scheduling) について以下の各小問に答えよ。表 1 に示す 4 つのプロセスを考える。到着時刻および実行時間の単位は [ms] とする。

プロセス	到着時刻	実行時間
P_1	0	8
P_2	1	4
P_3	2	9
P_4	3	5

表 1 各プロセスの到着時刻と実行時間

(1-1) プロセスの状態 (state) には、実行状態 (running)、実行可能状態 (ready)、待ち状態 (blocked) がある。実行状態から実行可能状態へ遷移するのはどのような場合か、および実行状態から待ち状態へ遷移するのはどのような場合かを、それぞれ 1 行で述べよ。

(1-2) 到着順方式 (FCFS: first-come first-served) と、非プリエンプティブ (non-preemptive) な最短ジョブ優先方式 (SJF: shortest job first) のそれぞれについて、各プロセスの完了時刻を求め、実行の様子をガントチャート (Gantt chart) の形で示せ。さらに、それぞれの方式における平均ターンアラウンド時間 (average turnaround time) と平均待ち時間 (average waiting time) を求めよ。

(1-3) 小問 (1-2) の結果を比較し、SJF が FCFS より平均待ち時間の点で優れている理由を 1, 2 行で述べよ。また、SJF を実際のシステムでそのまま適用することが難しい理由を 1 行で述べよ。

(1-4) 実行時間の長いプロセスが、短いプロセスに次々と追い越されて長時間実行されない状態に陥ることがある。この現象の名称を答えよ。また、これを回避するための代表的な手法を一つ挙げ、その仕組みを 1, 2 行で述べよ。

(2) 主記憶の管理方式について以下の各小問に答えよ。

(2-1) 可変区画方式 (variable partition) において、大きさ 100 KiB の空き領域から 30 KiB の要求に応えると、残りの 70 KiB が空き領域として残る。このような小さな空き領域が主記憶の各所に散在し、合計すれば十分な容量があるにもかかわらず大きな要求に応えられなくなる現象の名称を答えよ。また、固定区画方式 (fixed partition) で生じる別種の無駄の名称と、それがどのようにして生じるかを 1, 2 行で述べよ。

(2-2) 空き領域が先頭から順に 200 KiB, 80 KiB, 300 KiB, 120 KiB の 4 つ存在する。ここへ 90 KiB, 180 KiB, 100 KiB の要求がこの順に到着する。最初適合方式 (first-fit) と最良適合方式 (best-fit) のそれぞれについて、各要求がどの空き領域に割り当てられるかを示し、すべての要求を処理した後の空き領域の状態を答えよ。また、どちらの方式ですべての要求を満たせたかを述べよ。

(2-3) セグメンテーション (segmentation) 方式では、プログラムを論理的なまとまりごとに分割して主記憶に配置する。ページング (paging) 方式と比較したときのセグメンテーションの長所を一つ、短所を一つ挙げよ。また、両者を組み合わせた方式が用いられる理由を 1, 2 行で述べよ。

4 【選択問題】 計算理論

配点：(1-1) 15 点, (1-2) 20 点, (2-1) 25 点, (2-2) 25 点, (3-1) 20 点, (3-2) 20 点

決定性有限オートマトン (DFA: deterministic finite automaton) は $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ で表される。 Q は状態 (state) の有限集合, Σ は入力アルファベット (input alphabet), $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ は遷移関数 (transition function), q_0 は開始状態 (start state), $F \subseteq Q$ は受理状態 (accepting state) の集合である。DFA M が認識 (recognize) する言語を $L(M)$ と表す。以下ではアルファベットを $\Sigma = \{0, 1\}$ とする。以下の各問に答えよ。

(1) 言語 $L_k = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \geq k \text{ かつ } w \text{ の末尾から } k \text{ 番目の文字が } 1\}$ を考える (k は正の整数)。

(1-1) $k = 2$ のとき, L_2 を認識する DFA を状態遷移図 (state transition diagram) の形で示せ。開始状態には太い矢印, 受理状態は二重丸で表すこと。

(1-2) L_2 を認識する非決定性有限オートマトン (NFA: nondeterministic finite automaton) は, DFA より少ない状態数で構成できる。 L_2 を認識する状態数 3 の NFA を状態遷移図の形で示せ。また, NFA と DFA で必要な状態数に差が生じる理由を, 「末尾から 2 番目」をどのように扱っているかに着目して 1, 2 行で述べよ。

(2) 一般の k について, L_k を認識する DFA には少なくとも 2^k 個の状態が必要であることを示したい。以下の各小問に答えよ。

(2-1) 長さ k の相異なる 2 つの語 $x, y \in \Sigma^k$ ($x \neq y$) を任意にとる。このとき, ある語 $z \in \Sigma^*$ が存在して, xz と yz の一方だけが L_k に属することを示せ。(ヒント: x と y が異なる最初の位置を考えよ。)

(2-2) 小問 (2-1) の結果を用いて, L_k を認識する任意の DFA が少なくとも 2^k 個の状態をもつことを背理法 (proof by contradiction) により証明せよ。(ヒント: 状態数が 2^k 未満であれば, 長さ k の相異なる 2 つの語が同じ状態に到達することを鳩の巣原理 (pigeonhole principle) から導け。)

(3) 言語 $L = \{0^i 1^j \mid i \neq j\}$ について以下の各小問に答えよ。

(3-1) L の補集合 (complement) $\bar{L}$ を Σ^* 上で考える。 $\bar{L} \cap L(0^* 1^*)$ がどのような言語になるかを集合の形で示せ。

(3-2) 正則言語 (regular language) が補集合および積集合 (intersection) について閉じて (closed) いることと, $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ が正則言語でないことを用いて, L が正則言語でないことを背理法により証明せよ。

6 【選択問題】電子回路と論理設計

配点：(1-1) 15 点, (1-2) 20 点, (1-3) 15 点, (1-4) 15 点, (2-1) 20 点, (2-2) 25 点, (2-3) 15 点

(1) 図 1 に示す演算増幅器 (operational amplifier) を用いた回路について以下の各小問に答えよ。演算増幅器は理想的であるとし、入力端子には電流が流れ込まず、二つの入力端子の電位は等しい (仮想短絡, virtual short) ものとする。

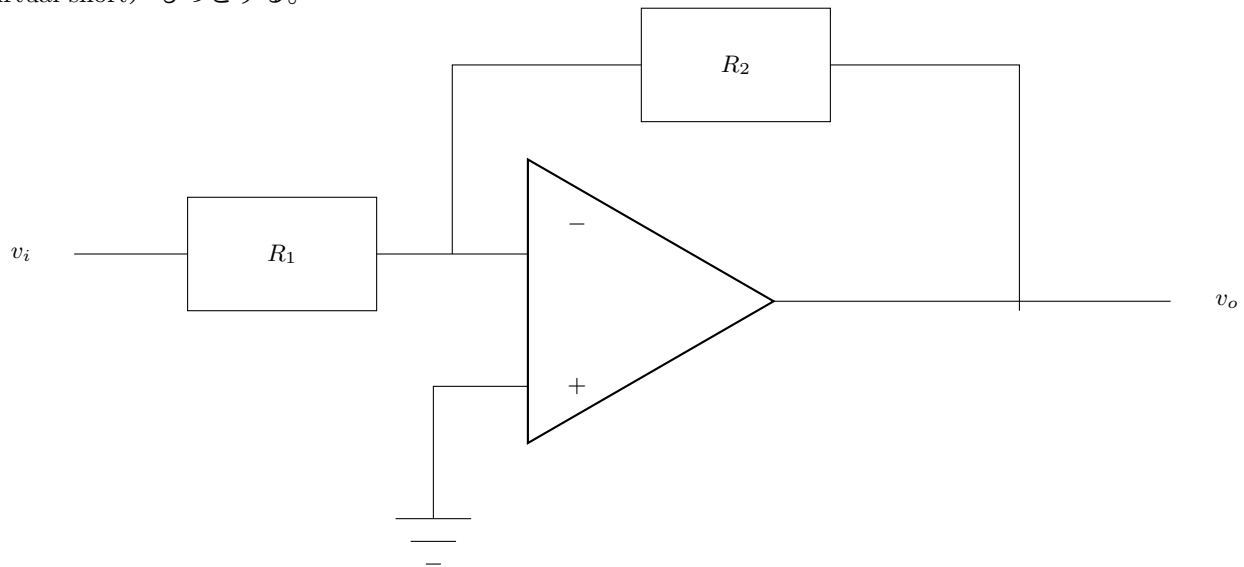


図 1 演算増幅器を用いた回路

(1-1) 反転入力端子の電位が 0 となる理由を、仮想短絡と非反転入力端子の接続に基づいて 1, 2 行で述べよ。

(1-2) R_1 を流れる電流と R_2 を流れる電流が等しいことを用いて、出力電圧 v_o を入力電圧 v_i , R_1 , R_2 を用いて表せ。また、この回路の名称を答えよ。

(1-3) $R_1 = 10\text{ k}\Omega$, $R_2 = 100\text{ k}\Omega$ とする。電圧利得 (voltage gain) v_o/v_i を求めよ。また、 $v_i = 0.2\text{ V}$ のときの v_o を求めよ。

(1-4) 図 1 の回路において、 R_2 を取り除いて開放した場合に出力がどうなるかを、演算増幅器の開ループ利得 (open-loop gain) が非常に大きいことに基づいて 1, 2 行で述べよ。また、このことから負帰還 (negative feedback) が果たす役割を 1 行で述べよ。

(2) 信号機の制御回路を同期式順序回路 (synchronous sequential circuit) として設計する。信号は「青」「黄」「赤」の 3 状態をこの順に繰り返し、各状態にとどまる時間はクロック信号 (clock signal) のサイクル数でそれぞれ 3, 1, 2 とする。出力は 3 ビット (g, y, r) とし、点灯している色に対応するビットを 1 とする。

(2-1) この回路が必要とする状態の総数を答えよ。また、状態遷移図を、各状態における出力 (g, y, r) とともに示せ。

(2-2) 小問 (2-1) の状態のうち、青に対応する 3 つの状態を S_0, S_1, S_2 , 黄に対応する状態を S_3 , 赤に対応する 2 つの状態を S_4, S_5 とする。状態割り当てを S_i に対して 3 ビットの 2 進数 i とし ($S_0 = 000$, $S_5 = 101$), 3 個の D フリップフロップ (D flip-flop) (y_2, y_1, y_0) で実現する。次状態 (D_2, D_1, D_0) の論理式の最簡積和形 (最小積和形) をそれぞれ求めよ。未使用状態 110, 111 は dont care (don't care) として扱ってよい。

(2-3) 小問 (2-2) の設計において、出力 (g, y, r) を状態 (y_2, y_1, y_0) から生成する論理式をそれぞれ求めよ。dont care を活用して簡単化すること。

7 【選択問題】 数学解析と信号処理

配点：(1-1) 15 点, (1-2) 25 点, (1-3) 15 点, (1-4) 15 点, (2-1) 15 点, (2-2) 20 点, (2-3) 20 点

確率・統計と離散時間信号処理について以下の各問に答えよ。ただし導出の過程も示すこと。 j を虚数単位 (imaginary unit) とする。

(1) 確率密度関数 (probability density function) $f(x; \theta)$ について, データ集合 $\mathcal{D} = \{x_i \mid i = 1, \dots, n\}$ が与えられたとき, 尤度関数 (likelihood function) を $L_f(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$, 対数尤度 (log likelihood) を $\log L_f(\theta)$ と定める。対数尤度を最大化するパラメータを求める問題を最尤推定 (maximum likelihood estimation) と呼ぶ。対数の底は e とする。

平均 (mean) μ , 分散 (variance) σ^2 の正規分布 (normal distribution) の確率密度関数は

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

である。

(1-1) データが上記の正規分布に独立に従うとき, 対数尤度 $\log L_f(\mu, \sigma^2)$ を n , σ^2 , $\sum_i (x_i - \mu)^2$ を用いて表せ。

(1-2) 対数尤度を μ および σ^2 について偏微分 (partial differentiation) することにより, 最尤推定値 $\hat{\mu}$ と $\hat{\sigma}^2$ をそれぞれ求めよ。

(1-3) データが $\mathcal{D} = \{2, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 9\}$ であるとき, 小問 (1-2) の結果を用いて $\hat{\mu}$ と $\hat{\sigma}^2$ の値を求めよ。

(1-4) 小問 (1-2) で求めた $\hat{\sigma}^2$ は, 母分散 (population variance) の推定量としては偏り (bias) をもつことが知られている。偏りのない推定量 (不偏分散, unbiased variance) は $\frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \hat{\mu})^2$ で与えられる。小問 (1-3) のデータについて不偏分散の値を求め, $\hat{\sigma}^2$ と比較せよ。また, n が大きくなるとき両者の差がどうなるかを 1 行で述べよ。

(2) 離散時間信号 (discrete-time signal) $x[n]$ の離散時間フーリエ変換 (discrete-time Fourier transform) を

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

で定義する。ここで ω は正規化角周波数 (normalized angular frequency) [rad/sample] である。

(2-1) 長さ N の矩形窓 (rectangular window)

$$w[n] = \begin{cases} 1 & (0 \leq n \leq N-1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

の離散時間フーリエ変換 $W(e^{j\omega})$ を, 等比級数 (geometric series) の和を用いて求めよ。結果は $\frac{\sin(\cdot)}{\sin(\cdot)}$ を含む形で表すこと。

(2-2) $|W(e^{j\omega})|$ が $0 < \omega \leq \pi$ の範囲で最初に 0 となる ω を求めよ。 $|W(e^{j\omega})|$ の主ローブ (main lobe) の幅を, 原点を挟んで最初に 0 となる 2 点間の距離と定めるとき, その幅を N を用いて示せ。また, N を大きくしたときに主ローブの幅がどう変化するかを述べよ。

(2-3) 周波数の近い二つの正弦波 (sine wave) からなる信号を有限長で観測し, そのスペクトル (spectrum) を求めることを考える。小問 (2-2) の結果に基づき, 二つの正弦波を分離して観測するために観測長 N をどのように選ぶべきかを 2, 3 行で述べよ。また, 矩形窓を用いた場合に生じる副ローブ (side lobe) が, 弱い信号の観測にどのような悪影響を与えるかを 1, 2 行で述べよ。